ĐỀ THI OLYMPIC CHÂU Á THÁI BÌNH DƯƠNG LẦN THỨ 31

Thời gian làm bài: 240 phút. Tháng 3 năm 2019.

Bài 1. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$a^2 + f(a)f(b) \text{ chia hết cho } f(a)+b \text{ với mọi } a,b \in \mathbb{Z}^+.$$

Bài 2. Cho m là số nguyên dương cố định. Xét dãy số (a_n) như sau: a_1 là số nguyên dương, còn với mỗi $n \ge 1$ thì a_{n+1} sẽ được tính bằng:

- $a_n^2 + 2^m$ nếu $a_n < 2^m$;
- $\dfrac{a_n}{2}$ nếu $a_n \ge 2^m$.

Với mỗi m, xác định tất cả giá trị a_1 sao cho tất cả các số hạng của dãy trên đều nguyên.

Bài 3. Cho tam giác ABC không cân nội tiếp Γ có M là trung điểm BC. Một điểm P thay đổi trên đoạn thẳng AM. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác BPM và CPM lần lượt cắt lại Γ tại các điểm D và E. Các đường thẳng DP và EP cắt lại các đường tròn ngoại tiếp các tam giác CPM và BPM tại các điểm X và Y. Chứng minh rằng khi P thay đổi thì đường tròn ngoại tiếp của tam giác AXY đi qua một điểm cố định T khác A.

Bài 4. Xét bảng ô vuông 2018×2019 mà mỗi ô được điền một số nguyên nào đó. Hai ô vuông được gọi là láng giềng nếu chúng có chung cạnh. Trong mỗi thao tác, người ta chọn một số ô vuông. Sau đó, ở mỗi ô được chọn, ta tính giá trị trung bình của các ô láng giềng của nó. Cuối cùng, ta đồng loạt thay số ban đầu được điền vào mỗi ô được chọn bởi giá trị trung bình tương ứng đã tính ở trên. Hỏi với mọi cách điền số ban đầu, có thể làm cho tất cả các số trên các ô của bảng bằng nhau sau hữu hạn bước thao tác thích hợp hay không?

Bài 5. Xác định tất cả các hàm số $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x^2 + f(y)) = f(f(x)) + f(y^2) + 2f(xy) \text{ với mọi } x, y.$$

Đề thi này phải được bảo mật cho đến khi công bố chính thức trên website
http://www.ommenlinea.org/apmo/